Informatyk i matematyk: dwa spojrzenia na jedno zadanie (studium przypadku)

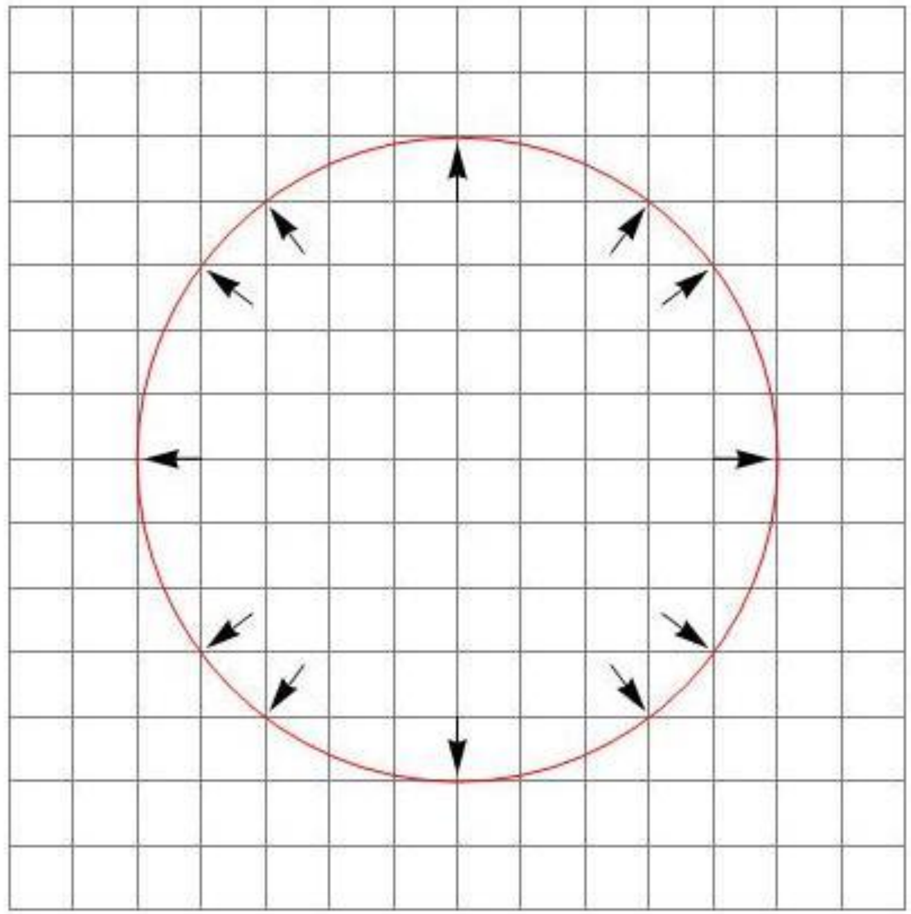
Krzysztof Ciebiera, Krzysztof Diks,
Paweł Strzelecki

Zadanie (matura z informatyki, 2009)

Dane: dodatnia liczba całkowita R.
Wynik: liczba punktów kratowych w ćwiartce koła o środku w punkcie (0,0) i promieniu R, wliczając punkty brzegowe.
Przykład: Dla R = 1, 2, 3 wynikami są, odpowiednio, 3, 6, 11.

Rozwiązanie 1 (kiepskie):

```
int Pole(int r){
int x, y, p;
    p = 0;
    for (x = 0; x <= r; x++)
        for (y = 0; (x*x + y*y) <= r*r; y++)
            p = p + 1;
    return p;
}
```



Rozwiązanie 2 - niby piękne, ale błędne (dlaczego?):

```
int Pole(int r){
int x, y, p;

    y = r; p = 2*r+1;
    for (x = 1; x <= r; x++){
        do
            y = y - 1;
        while ((x*x + y*y) > r*r);
        p = p + y;
    }
    return p;
}
```

Pytanie: jak zmieni się liczba punktów kratowych w ćwiartce koła na odcinku x=const, gdy x zmieniamy o 1?

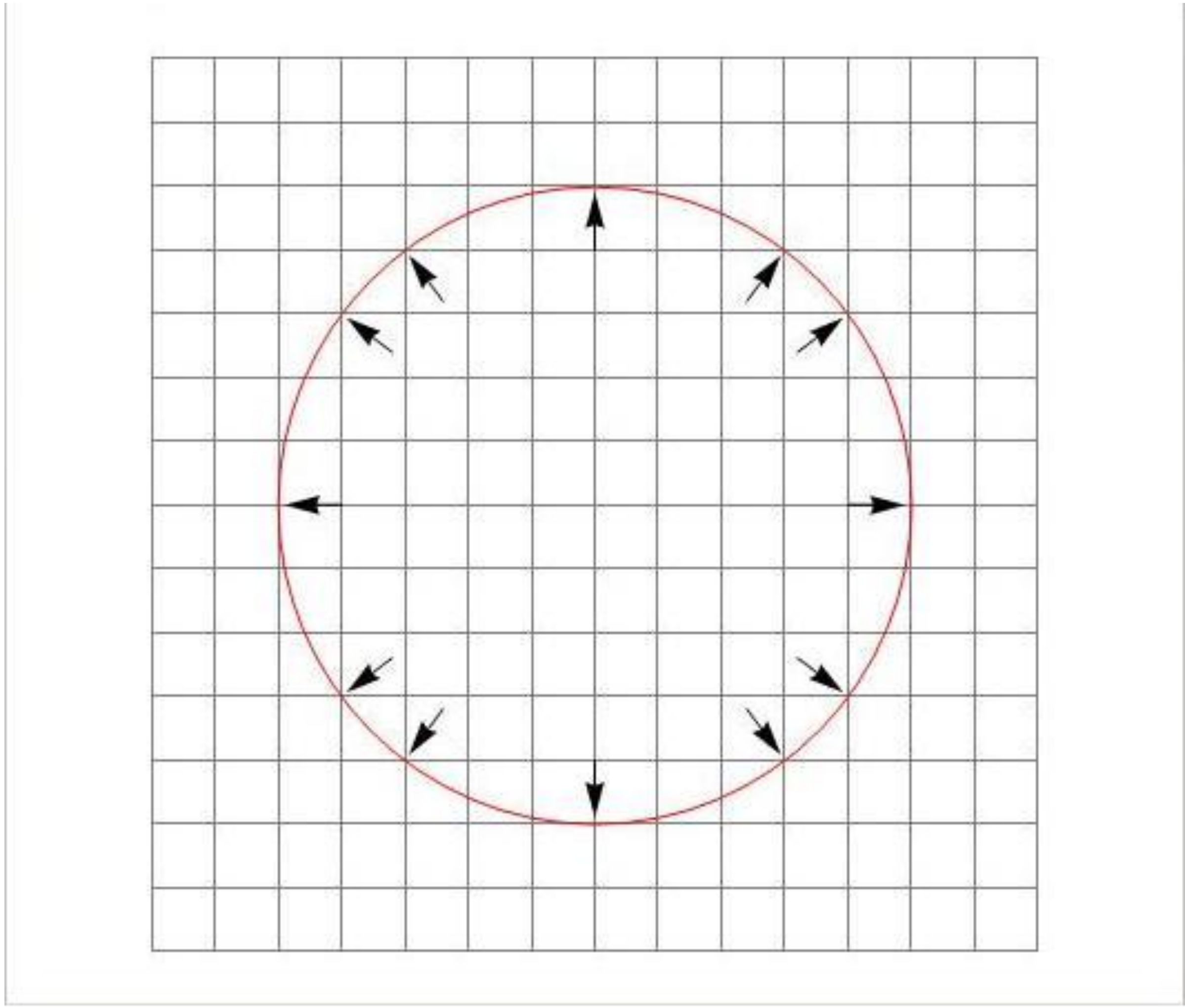
Błąd w rozumowaniu:

Okrąg w pobliżu punktu o współrzędnych (0,R) jest "prawie płaski" (skądinąd, jak każda krzywa gładka).

Zwiększając odciętą o 1 i patrząc

"z dokładnością 1",

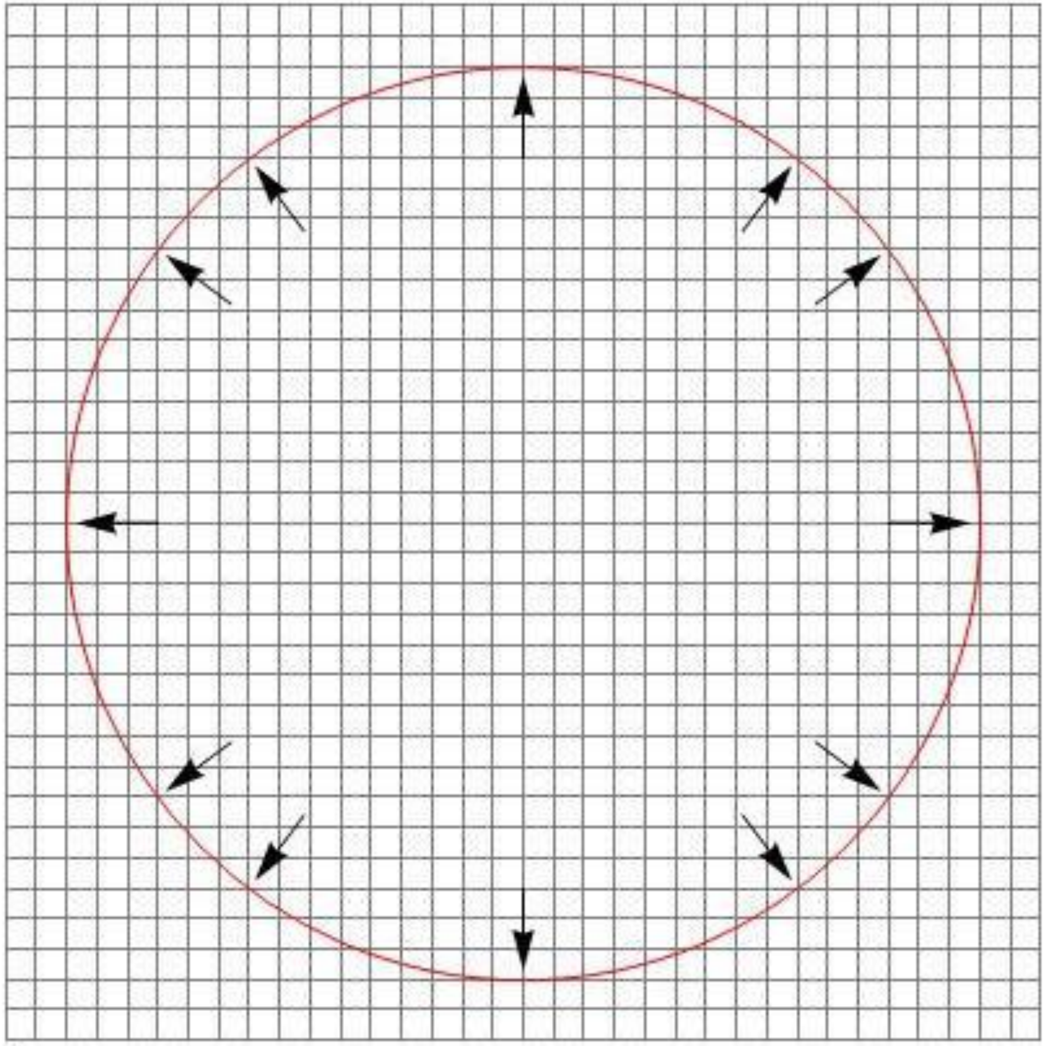
zwykle nie jesteśmy w stanie zauważyć, że krzywizna nie jest zerem.



Rozwiązanie 3 - piękne i poprawne

```
int Pole(int r){
int x, y, p;
    y = r; p = 2*r+1;
    for (x = 1; x <= r; x++){
        while ((x*x + y*y) > r*r)
            y = y - 1;
    p = p + y;
    }
return p;
}
```

Pytanie: Czy można **while** zastąpić przez **if**? Innymi słowy, czy jest prawdą, że gdy przesuniemy x o 1 w prawo, to współrzędna y pierwszego napotkanego w kole punktu kratowego spadnie co najwyżej o 1?



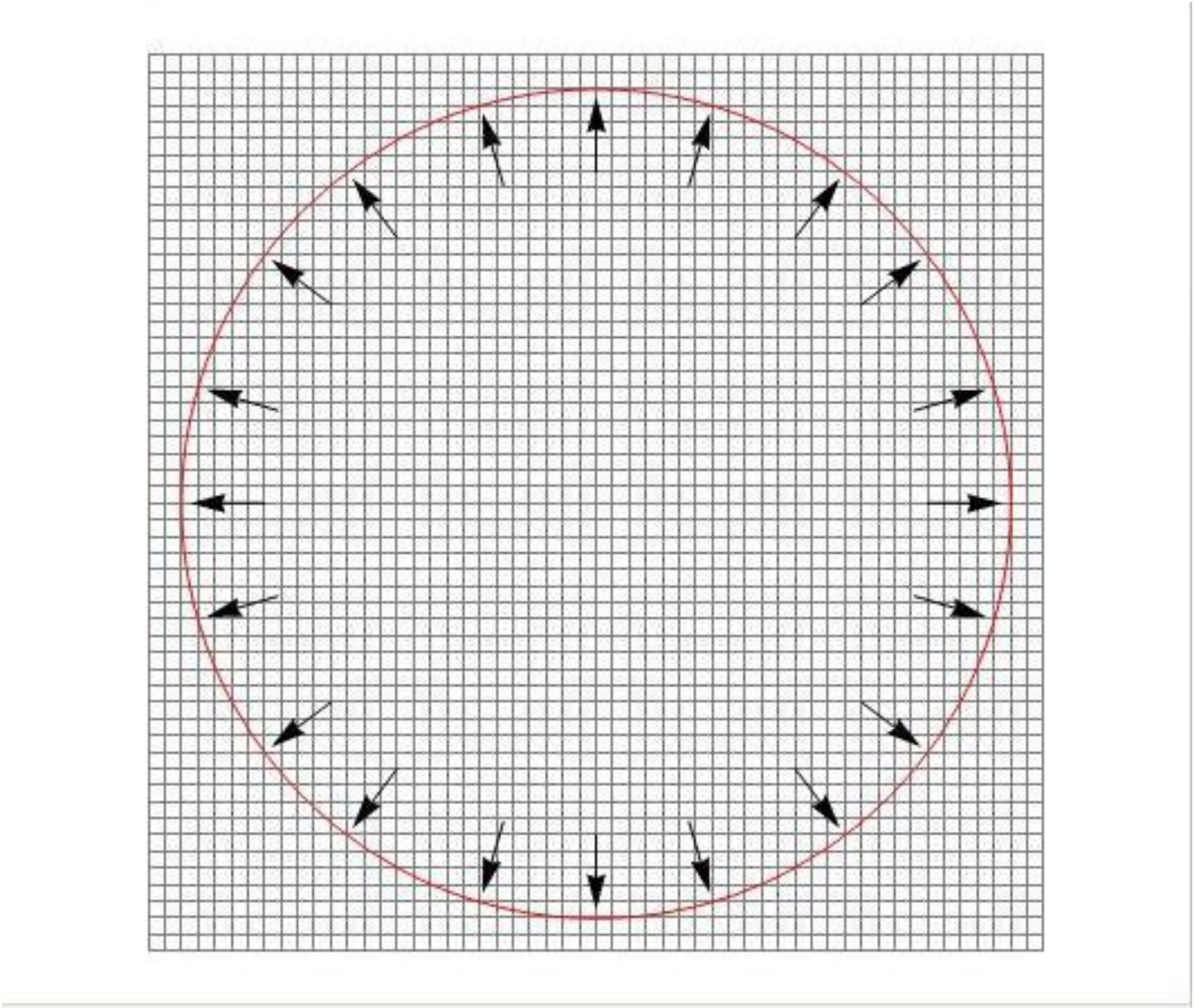
Nie! Dla dużych promieni oraz x bliskich r mamy do czynienia z `nieomal pionowym' łukiem okręgu.
(Z geometrycznego punktu widzenia powód jest dokładnie ten sam, co wcześniej)

Wnioski? Spostrzeżenia? Źródła trudności?

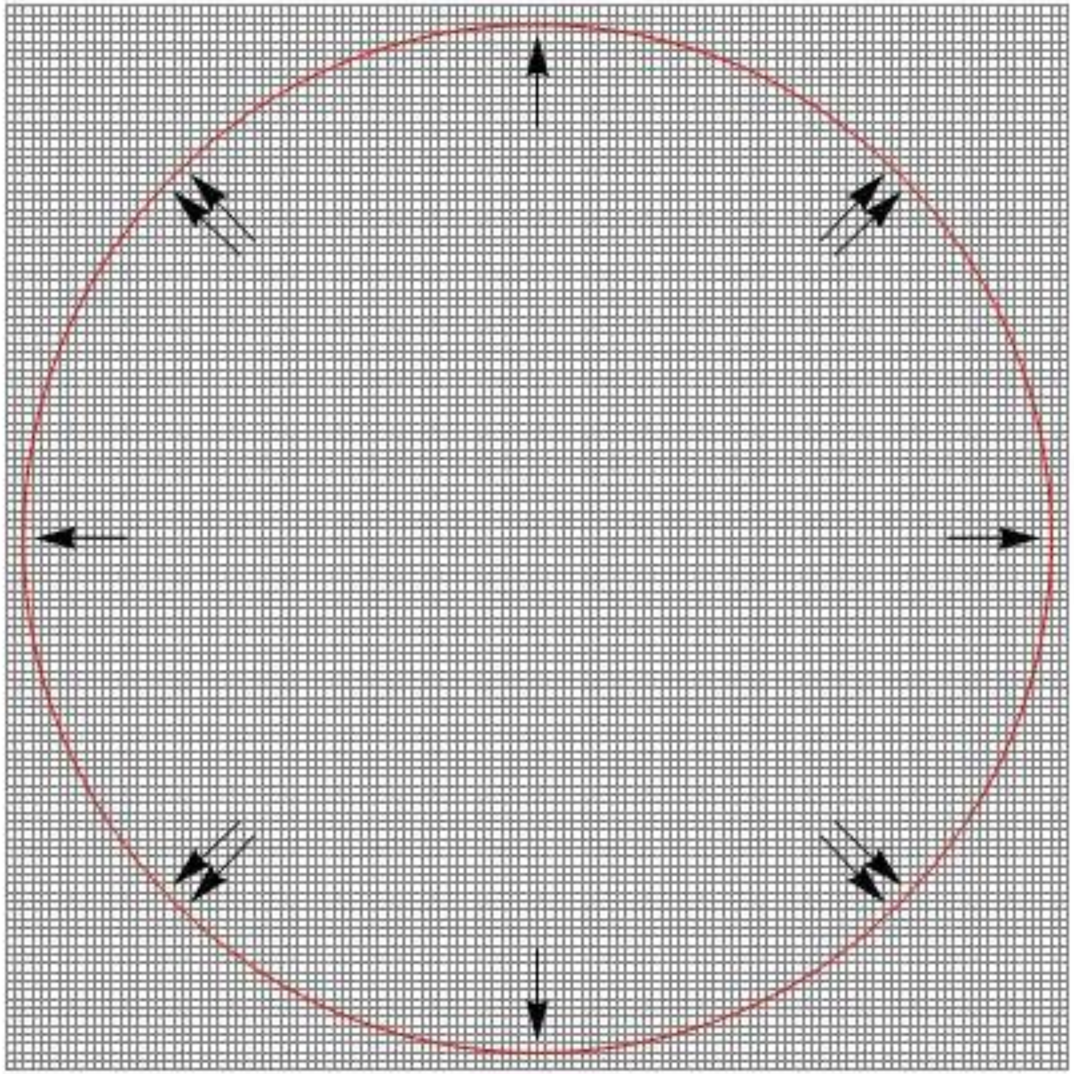
- Na okręgu mogą być punkty kratowe;
- Nie jest łatwo przewidzieć, ile ich jest;
- Eksperyment pokazuje, że ich liczba może się zmieniać w sposób, pozornie dość przypadkowy.

Ponadto, intuicja podpowiada, że

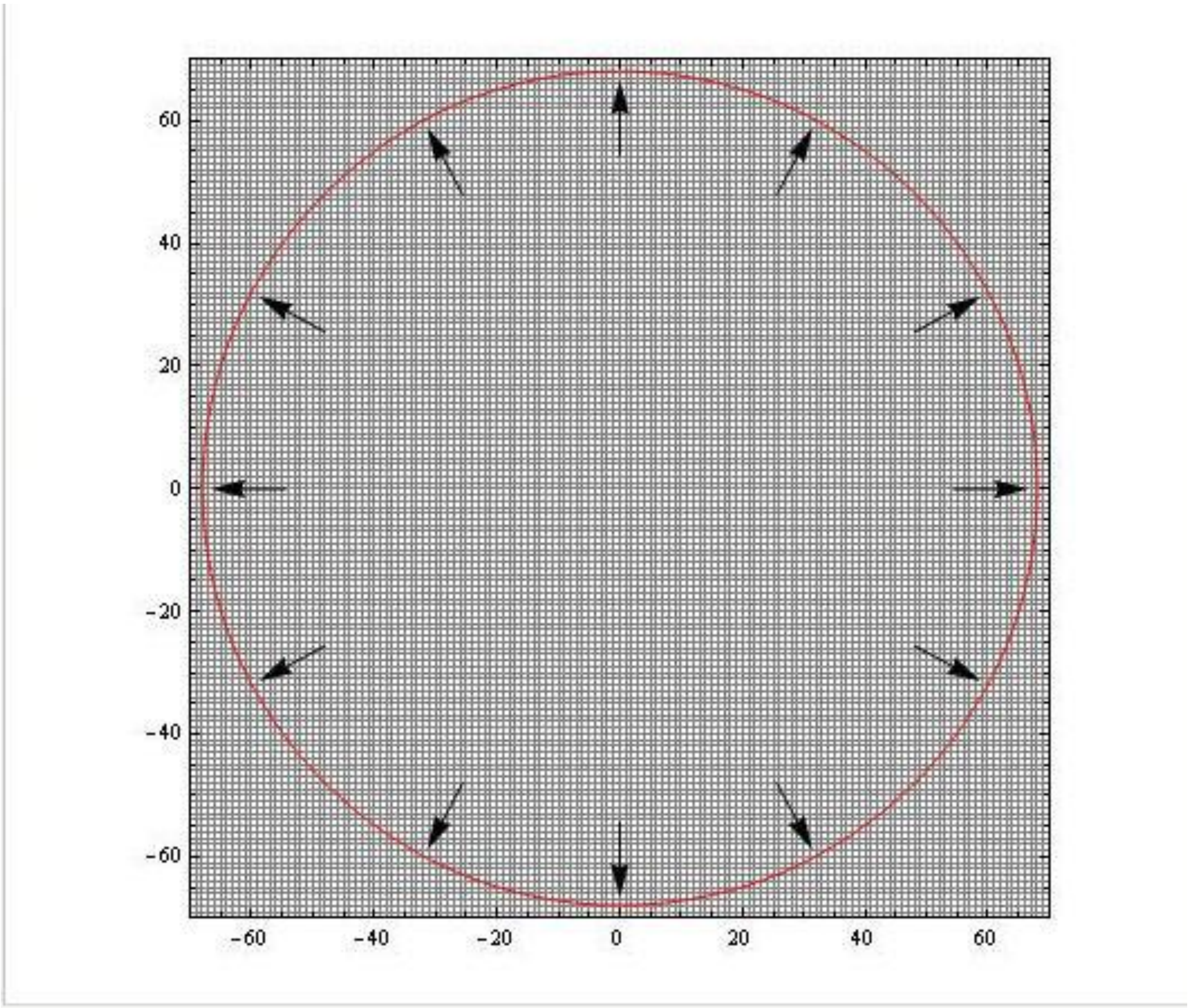
- Liczba punktów kratowych w ćwiartce koła powinna być niezłym przybliżeniem pola ćwiartki;
- Błąd przybliżenia? Najpewniej $O(R)$.



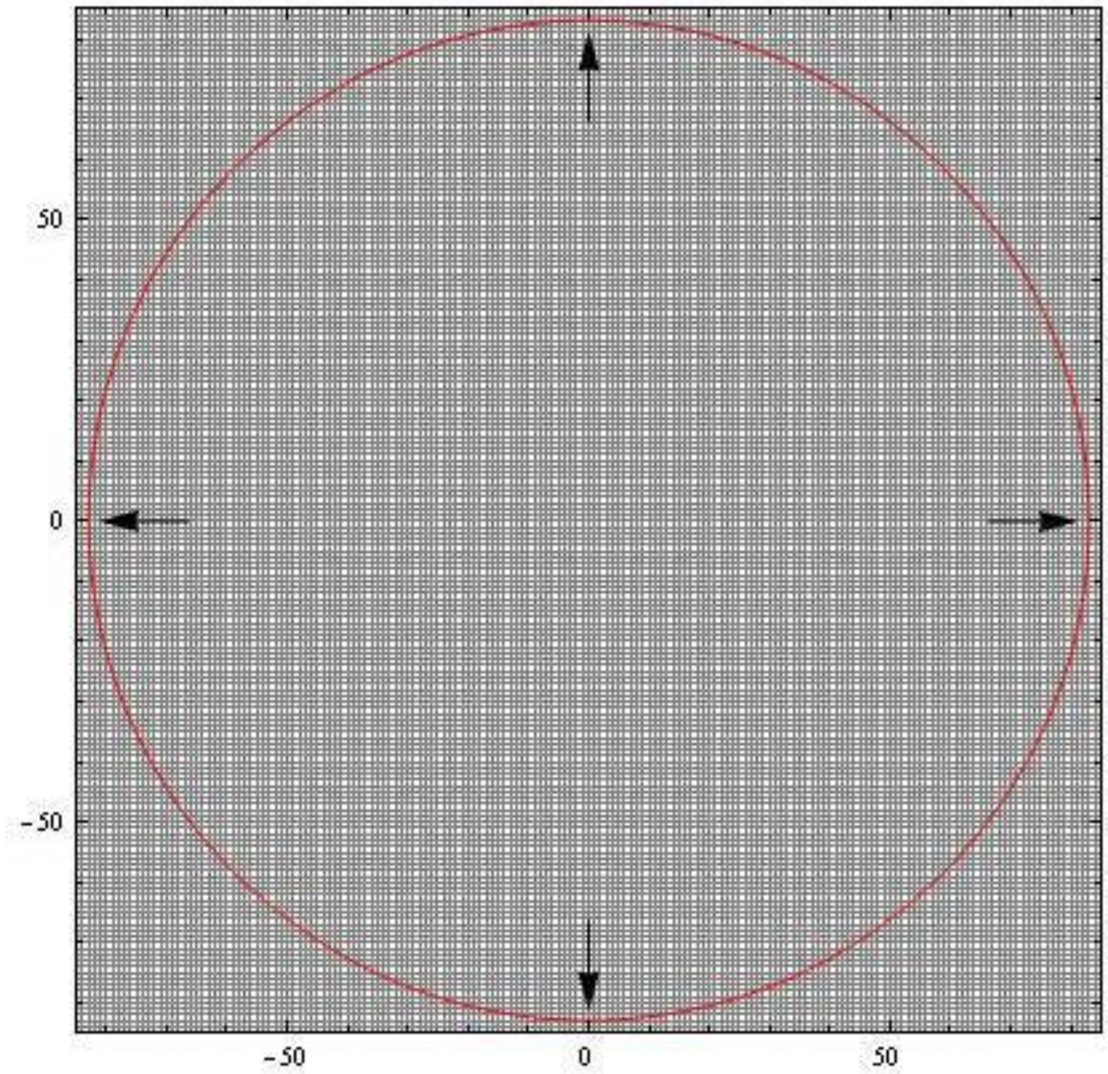
R=25



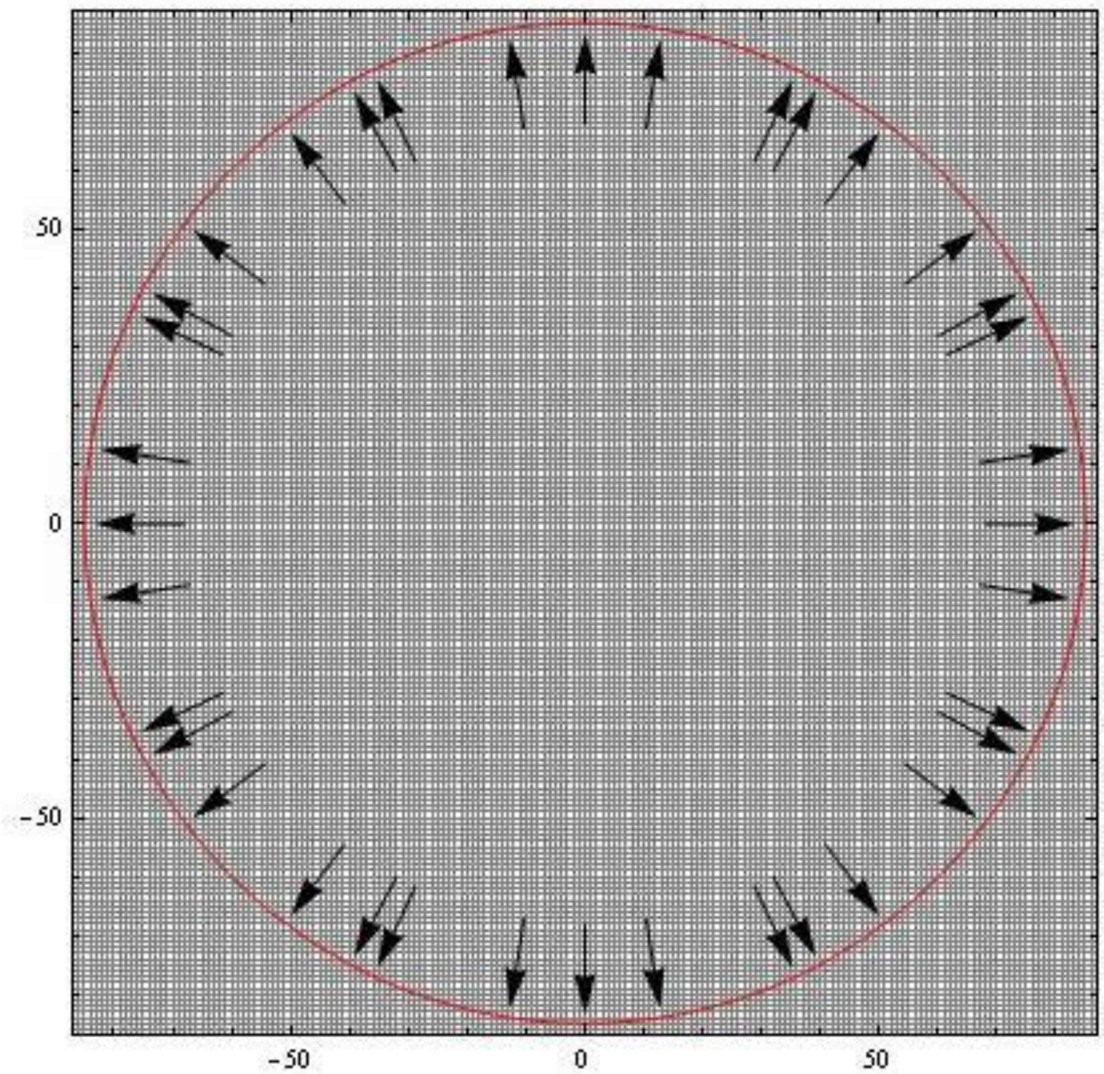
R=58



R=68



R=83



R=85

Kilka faktów

Twierdzenie (Hugo Steinhaus). Dla każdej liczby n istnieje koło, które ma pole równe n i zawiera we wnętrzu dokładnie n punktów kratowych.

Twierdzenie (Andrzej Schinzel). Dla każdej liczby n istnieje okrąg, na którym leży dokładnie n punktów kratowych.

Twierdzenie (Tadeusz Kulikowski). Dla każdej liczby n istnieje w przestrzeni trójwymiarowej sfera, na której leży dokładnie n punktów kratowych.

Zadanie Gaussa o punktach kratowych w kole

C.F. Gauss: Jeśli przez N(R) oznaczymy liczbę punktów kratowych we wnętrzu koła o środku w (0,0) i promieniu R, to

N(R) = Pole koła o promieniu R + E(R),

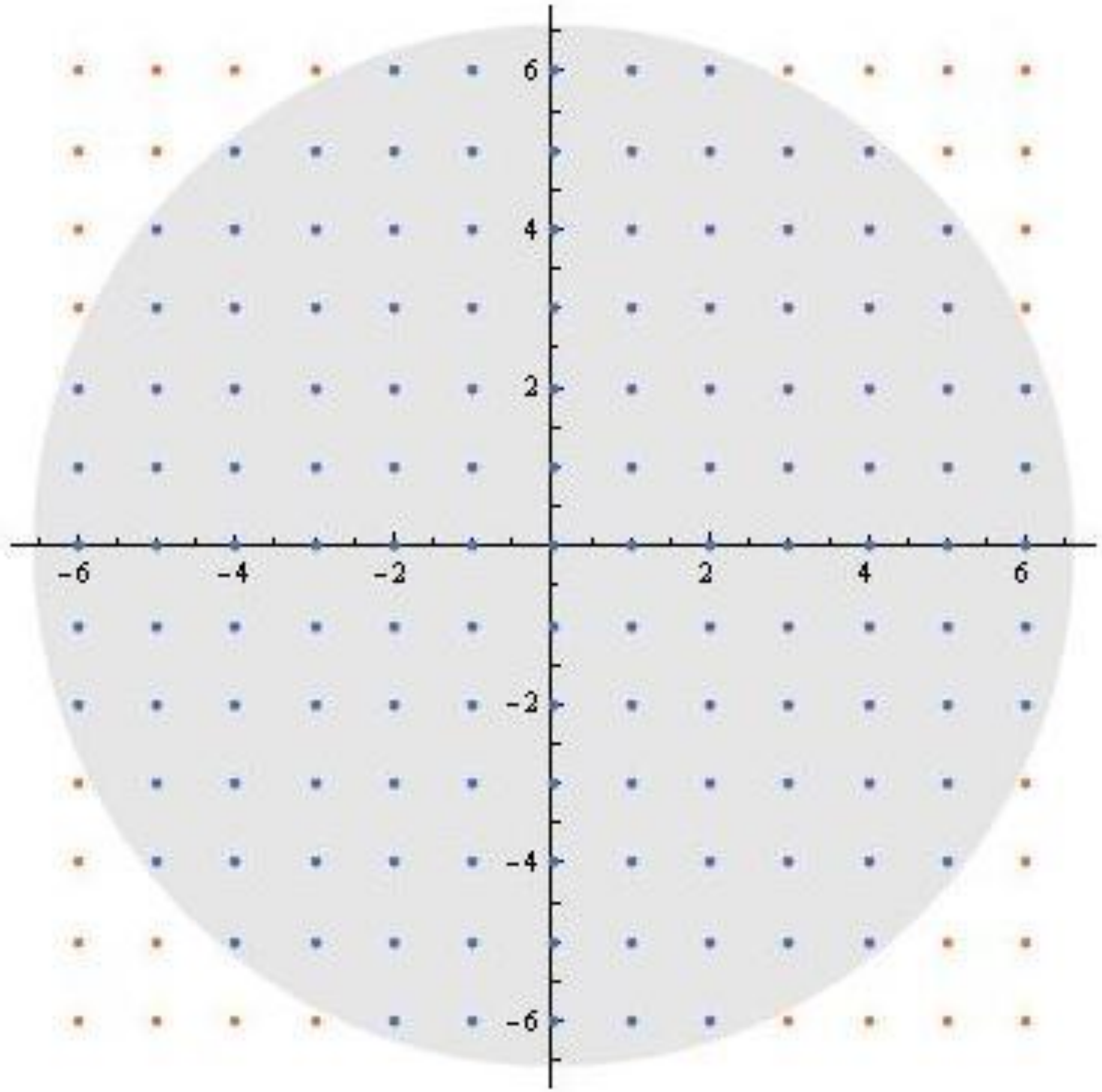
gdzie błąd

|E(R)| < (3/2) * obwód koła o promieniu R.

Uwaga: błąd może być zarówno dodatni, jak i ujemny!

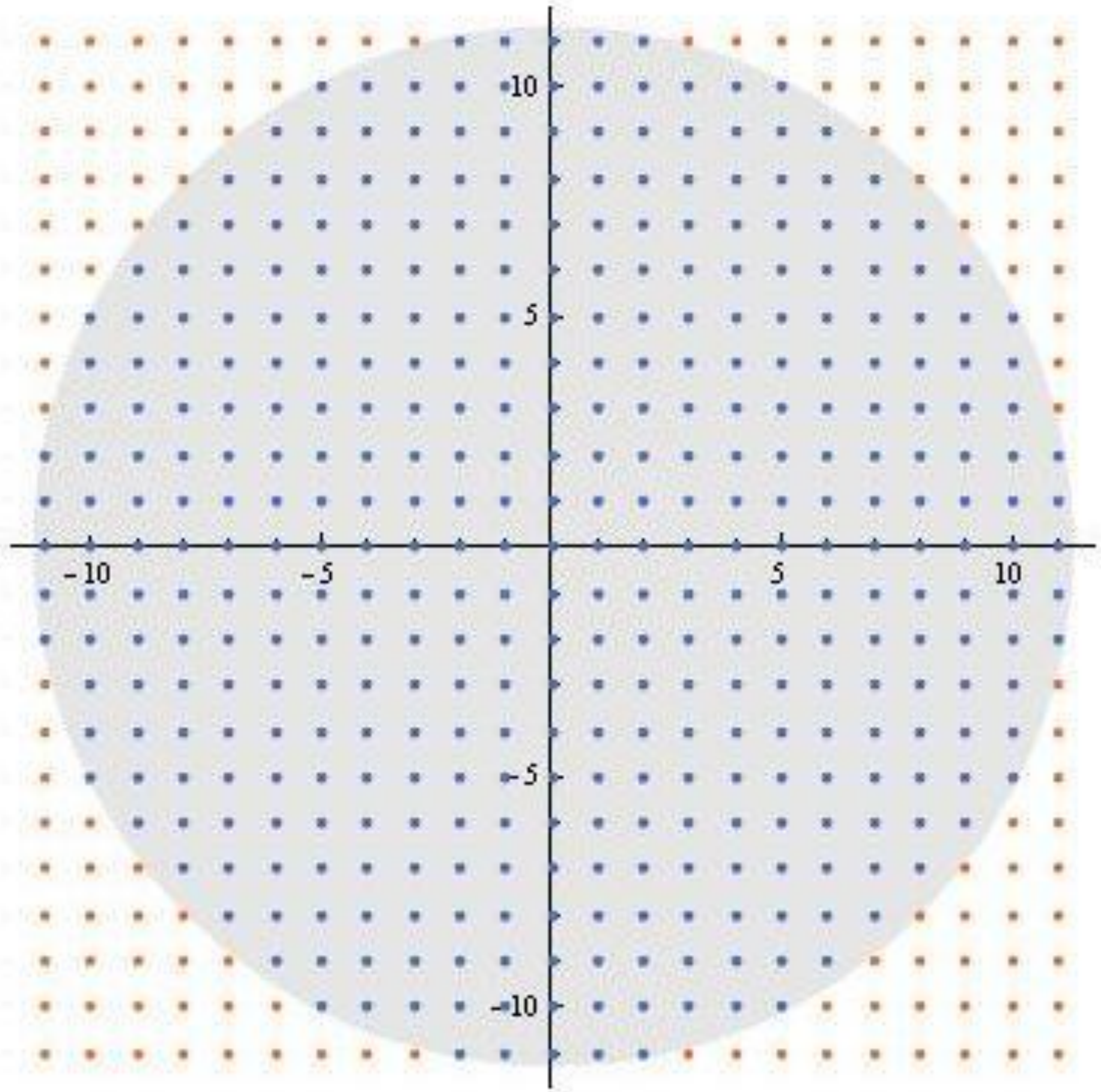
Do dziś nie wiadomo, jakie jest najlepsze oszacowanie błędu. Czasem |E(R)| bywa większy, niż o(R1/2(log R)1/4).

$$N(r) = \pi r^2 + 0.148989\, r$$



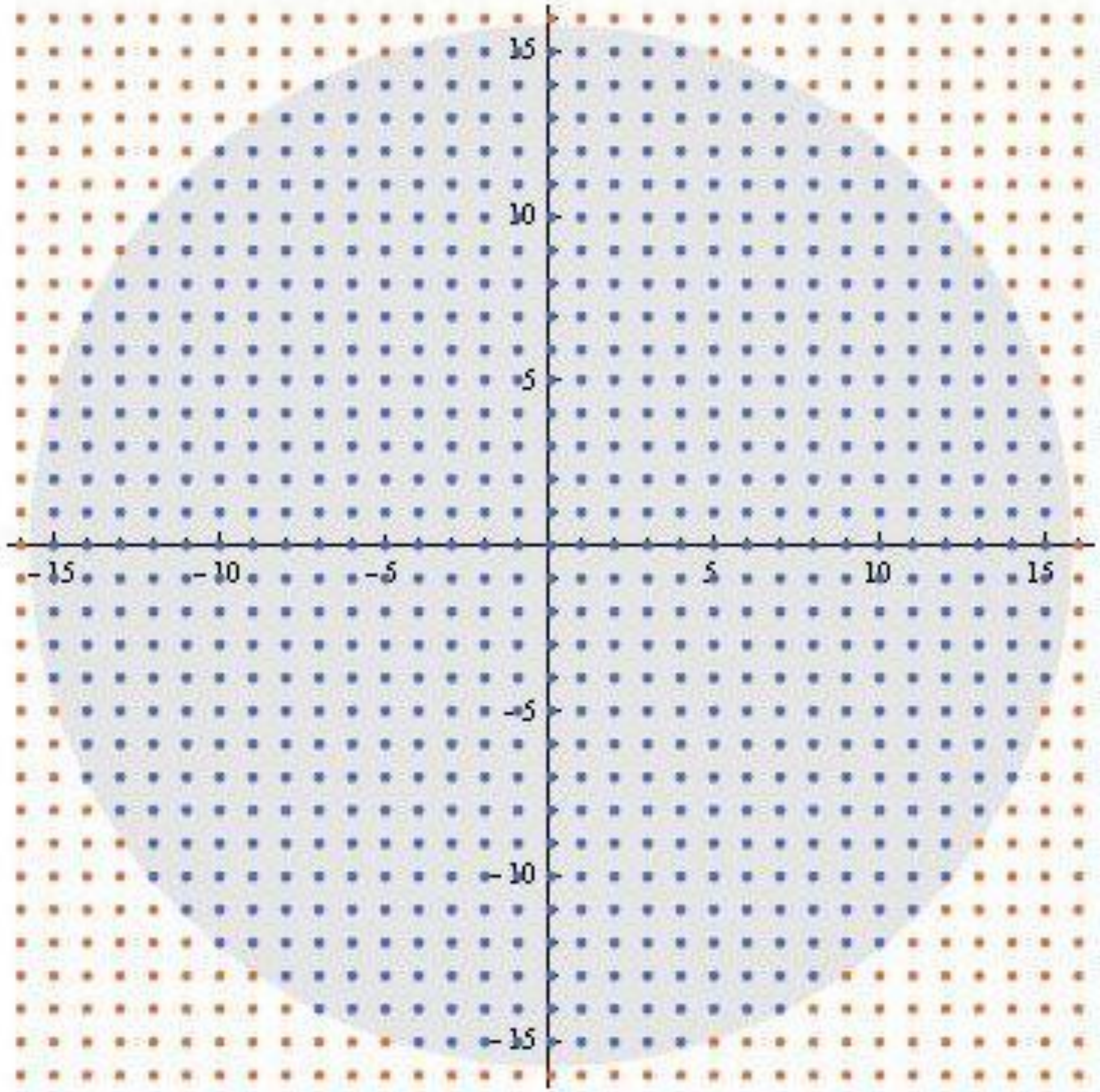
Promień ok. 6,58

$$N(r) = \pi r^2 - 0.0132713\, r$$



Promień nieco ponad 11: N(r) bardzo bliskie polu koła

$N(r) = \pi r^2 - 0.459949\, r$



Promień r około 15,8: błąd E(r) < 0.

Obliczanie pola wielokąta

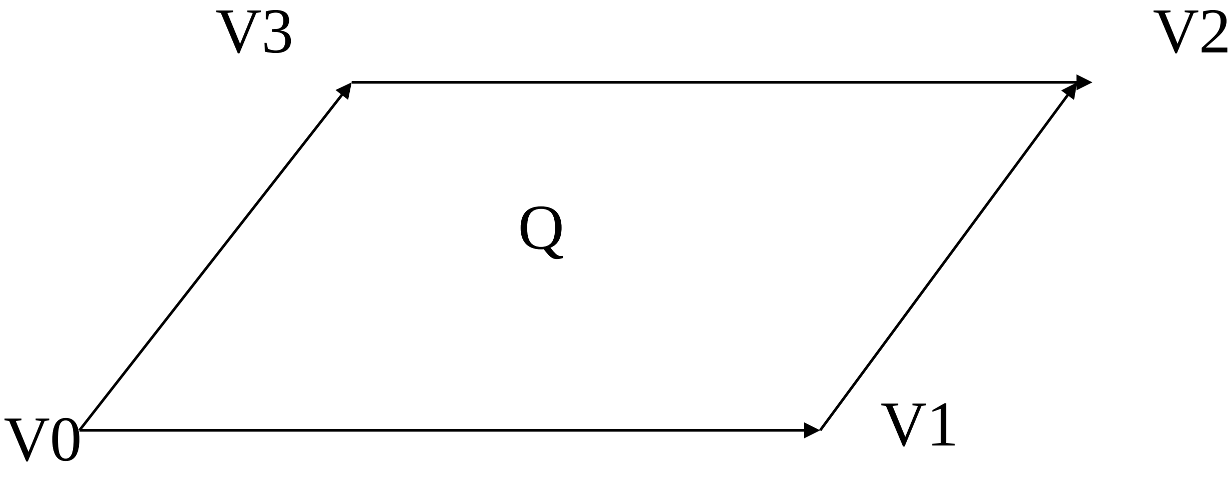
Dane: ciąg n wierzchołków P0=(x0,y0), ..., Pn-1(xn-1,xn-1) pewnego n-kąta W, leżących kolejno na jego obwodzie, licząc w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara.

Wynik: pole wielokąta W**.**

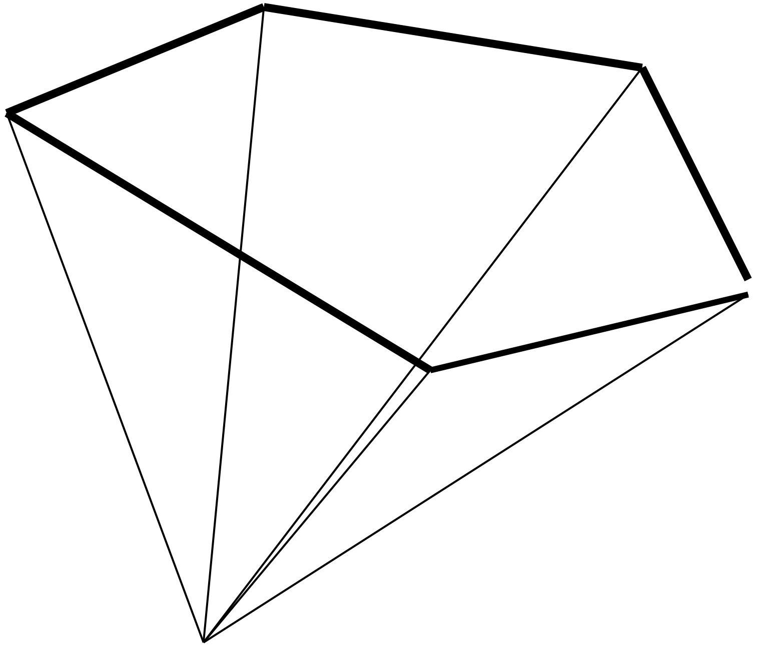
Rozwiązanie:

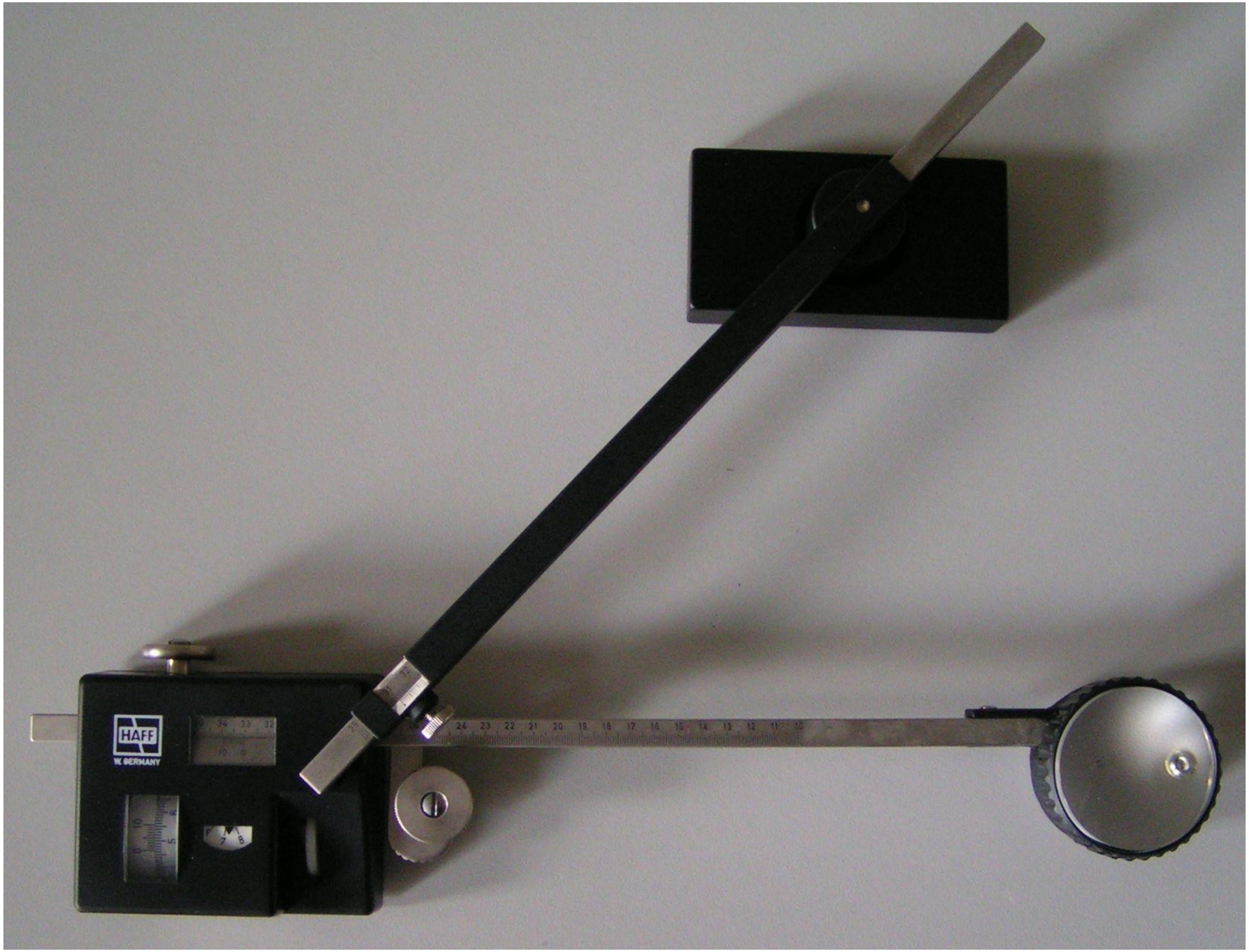
$$2*Pole(W) = (x_0*y_1-x_1*y_0) + (x_1*y_2-x_2*y_1) + ... + (x_{n-1}*y_0-x_0*y_{n-1})$$

A gdybyśmy chcieli wiedzieć, ile jest punktów kratowych w wielokącie...?



$$\text{Pole}(Q) = (x_1 - x_0)(y_3 - y_0) - (x_3 - x_0)(y_1 - y_0)$$





Dygresja: planimetr, maszyna do obliczania pola, oparta na tym pomyśle, pochodzi z **1814** roku (tu nowszy model)

Rozważmy prostszy przypadek, gdy wszystkie wierzchołki mają współrzędne całkowitoliczbowe.

Czy to jest prostsze?

Jeszcze łatwiejsze zadanie:

Dany jest odcinek AB, gdzie $A=(x_A,y_A)$, $B=(x_B,y_B)$ i wszystkie współrzędne są całkowite. Ile punktów kratowych leży na odcinku AB?

Jeśli AB jest odcinkiem poziomym lub pionowym, sytuacja jest banalna. Takich punktów jest $|x_B-x_A + y_B-y_A| + 1$.

Rozważmy zatem przypadek, bez starty ogólności, gdy

$$x_A < x_B \text{ i } y_A < y_B.$$

Ze szkoły wiadomo, że każdy punkt na odcinku AB można wyrazić wzorem

$$(x_A + t(x_B - x_A), y_A + t(y_B - y_A))$$

dla pewnego t z przedziału [0,1].

Wynika stąd, że liczba punktów kratowych na odcinku AB wynosi

$$1 + NWD(x_B - x_A, y_B - y_A).$$

Największy wspólny dzielnik można obliczyć szybko dzięki algorytmowi Euklidesa.

Czy można to wykorzystać do obliczenia liczby punktów kratowych w trójkącie o wierzchołkach w punktach kratowych?

Twierdzenie Picka

Twierdzenie. Niech F będzie wielokątem o wierzchołkach w punktach kratowych. Jeśli

- P oznacza jego pole,
- N jest liczbą punktów kratowych wewnątrz F,
- B jest liczbą punktów kratowych na brzegu F,

to wtedy

$$P = N + B/2 - 1$$

(Georg Alexander Pick, końcówka XIX wieku)

Uwaga: twierdzenie ma (skomplikowane) uogólnienie na wielościany w przestrzeni trójwymiarowej.

Dowód: w gruncie rzeczy indukcja

Etap I. Sklejamy dwa wielokąty, F_1 i F_2, wzdłuż wspólnego boku, na którym jest k punktów kratowych (wliczając końce). Założmy, że dla F_1 i F_2 twierdzenie zachodzi.

Wtedy, "oczywiście"

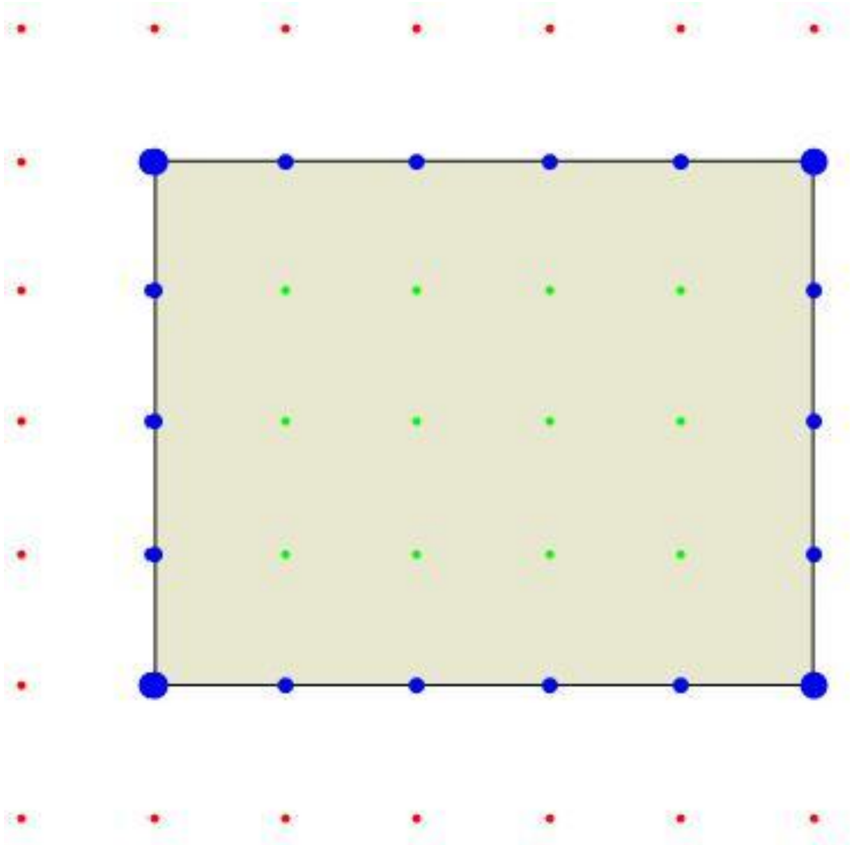
$$N = N_1 + N_2 + (k - 2)$$
$$B = B_1 - (k - 2) + B_2 - k = B_1 + B_2 - 2k + 2$$

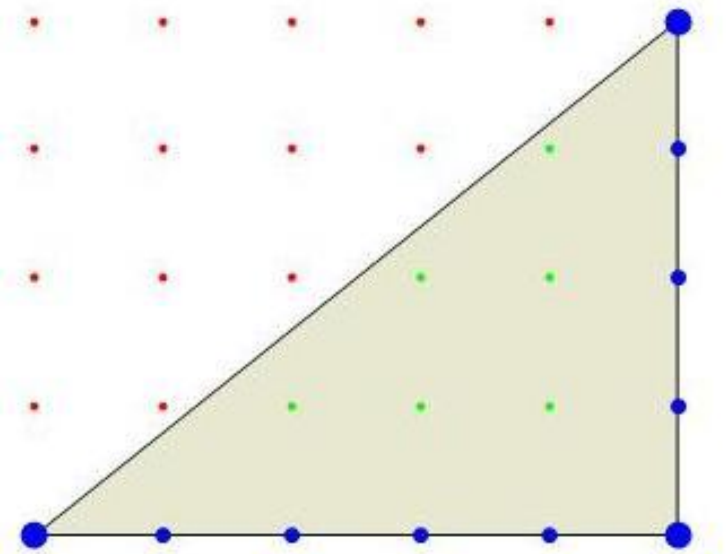
a stąd
$$\begin{aligned} 2P = 2P_1 + 2P_2 &= (2N_1 + B_1 - 2) + (2N_2 + B_2 - 2) \\ &= B_1 + B_2 - 2k + 2 + 2N_1 + 2N_2 + 2k - 2 - 4 \\ &= B + 2N - 2 \end{aligned}$$

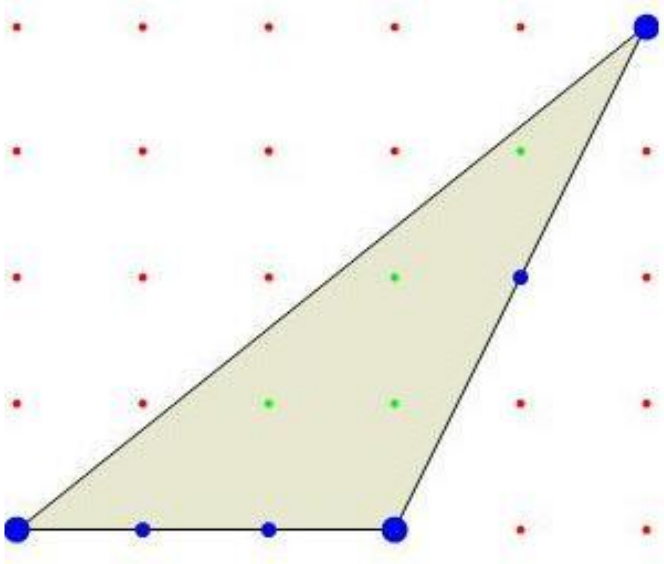
i wszystko się zgadza! **(... Można też odcinać wielokąty).**

Krok indukcji to jednak nie wszystko...

Proste przypadki:







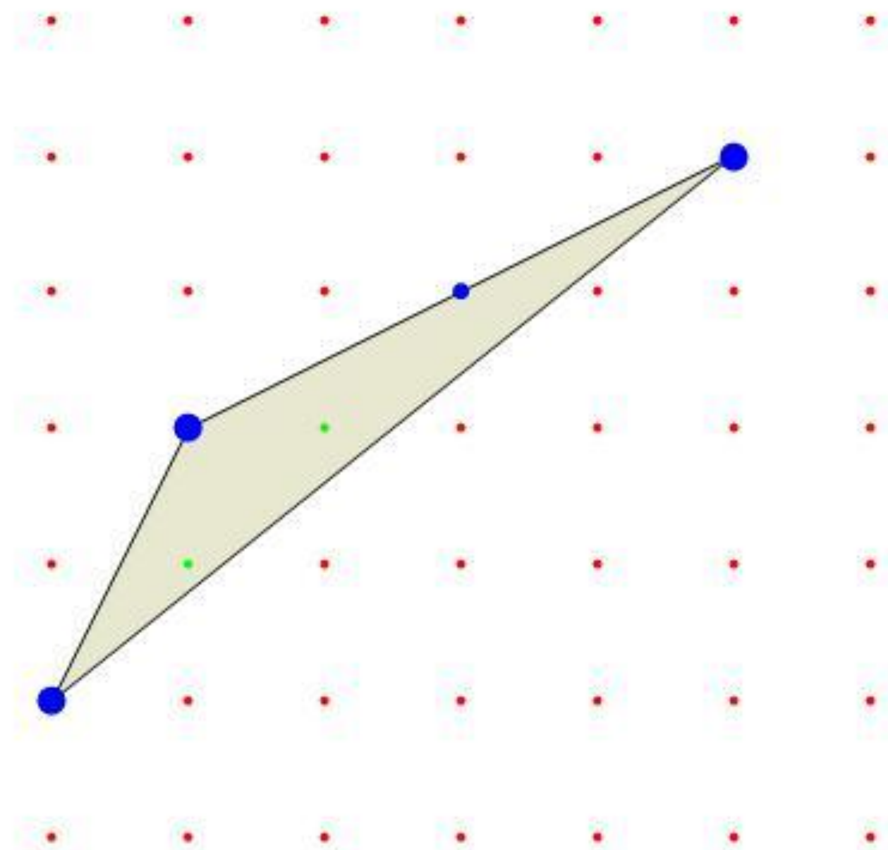
Dowód, cd. i końcówka

Etap II. Formalna baza indukcji

- Dla prostokątów P o bokach równoległych do osi wzór się zgadza (łatwe);

- Dla trójkątów prostokątnych, otrzymanych przez podział takich P przekątną - też.

- Dla innych trójkątów - również (można dobudować 2 lub 3 trójkąty prostokątne oraz ew. mały prostokąt i zrobić duży prostokąt).



Morały na zakończenie

- Ludzie są różni. Tę samą rzecz każdy widzi nieco inaczej.
- Co dwie głowy, to nie jedna.
- Bywa, że zadanie = czubek góry lodowej.
- Warto czasem przystanąć i rozejrzeć się dookoła.
- Matematyka i informatyka mają wiele wspólnego. Mogą się nie tylko uzupełniać, ale także wzajemnie wzbogacać.